写在前面的话

本人非学流体出身，初时只略有涉猎，后因学习需要，勘此流体第一方程——Navier-Stokes 方程。此于本专业或聪明毓秀之人，自不在话下，于我则艰涩难懂。往往“显而易见”之处，我需思索多时，断断续续间，自接触至今，已近一年。其间人事变动，岁月倥偬，总算可窥其门径。此方程既是流体力学支柱，亦是门径之学。欲登堂入室，此之一节，逾越不得。当我不得要领之时，曾立誓，若得通，定当付之网络，知于似我等愚鲁而又欲知之者。

此文欢迎转载，讨论，指教，多多益善。

Email：zsqsolking@163.com

目录

引言

【理论依据】

理论依据非常简单，牛顿第二定律。

F=ma（1）

有了受力，有了加速度，本方程基本形式就算完成。余下的，就是对力、加速度等的处理、化简了。

【本文思路】

本文首先根据牛顿第二定律，找到所研究的单元体受到的力。即质量力和表面力。（一）

根据应力和应变的关系，将应力进行转化，因为实际应用时应力是很难获取的。这就得到了 可压缩流体 N-S 方程最一般的形式。（二）

结合连续性方程（即质量守恒方程），得到了不可压缩流体 N-S 方程的形式。（三）

对其加速度项进行化简，转化为一般的形式。因为加速度有两个，当地加速度和位移加速度，只是用一个$\frac{du}{dt}$表示会给特殊性试下的化简带来问题。这样就得到了我们最常见的不可压缩流体的 N-S 方程（41）式。（四）

一、N-S 方程的最初形式

1、作用在单元体上的力

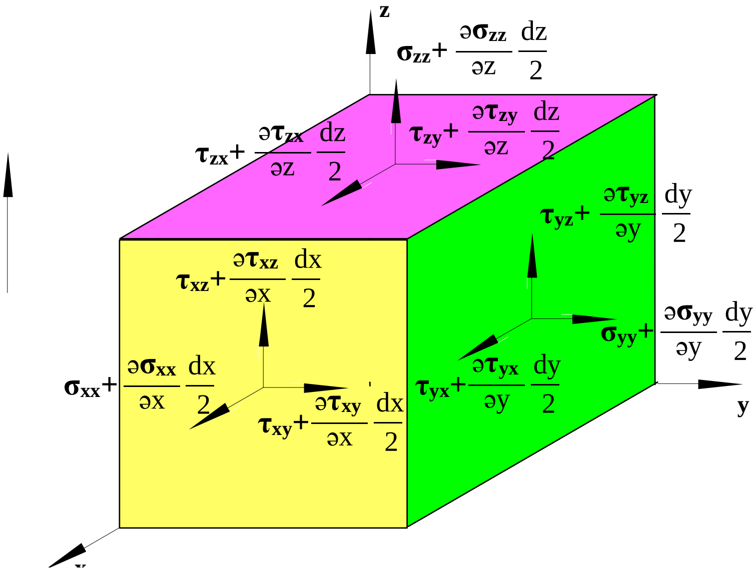


图 1 作用在单元体上的力

作用力有两类，即质量力和表面力。

1.1 质量力

质量力是作用在每一个流体质点上，大小与流体的质量成正比。工程流体力学中，会遇到两种质量力：重力和惯性力。惯性力是一个很特殊的称谓，原来中学教程中认为惯性力并不是力，但是实际上，在出现加速度的时候，惯性力的作用同普通力是完全一样的，只是惯性力会随着加速度的消失而消失。如果认为惯性力是一种力，那么牛顿第二定律（1）也可以认为是力的平衡。式的右端就是惯性力，左端就是其他的常规力。其实观察一下重力，G=mg，同惯性力的 ma 本质上是一致的，g 本身就是重力加速度。但在这个推导中，暂且不将

惯性力视作常规力，而是按照一般的牛顿第二定律来推导。虽然这样做本质上没有一点变化。

假设单位质量流体上的质量力在各个坐标轴的分量分别为，X，Y，Z。图 1 流体单元体的质量为：$\rho dxdydz$。则作用在流体单元体上的质量力在坐标轴的分量分别为：$X\rho dxdydz$、$Y\rho dxdydz$、$Z\rho dxdydz$。

1.2 表面力

作用在隔离流体（也就是所取的研究流体单元）的表面，和作用的面积成正比的力。分为垂直于作用面的压力和沿作用面方向的切力。表面力可以使作用于流体界面的压力、切力，也可以是一部分流体质点作用于相邻另一部分流体质点的压力、切力。单位作用面的压应力、切应力即为图 1 中的σ、τ（第一个下标表示作用面的法线方向，第二个下标表示力的方向）。

以 x 方向为例，流体单元受到的力：

$$
\begin{aligned}
G_x = &\underbrace{\left[\left(\sigma_{xx}+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)-\left(\sigma_{xx}-\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right)\right]dydz}_{\text{作用在x方向的压力}} \\
&+\underbrace{\left[\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)-\left(\tau_{yx}-\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2}\right)\right]dxdz}_{\text{作用在x方向的切力}} \quad (2) \\
&+\underbrace{\left[\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)-\left(\tau_{zx}-\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right)\right]dxdy}_{\text{作用在x方向的切力}}
\end{aligned}
$$

即：

$$G_x=\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)dxdydz \quad (3)$$

y，z 方向同理可获得。

$$G_y=\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)dxdydz \quad (4)$$

$$G_z=\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right)dxdydz \quad (5)$$

2、单元体的加速度和重量

加速度和质量的乘积（（1）式右侧）在三个方向上的分量分别为：

$$ma_x=\frac{du_x}{dt}\rho dxdydz \quad (6)$$

$$ma_y=\frac{du_y}{dt}\rho dxdydz \quad (7)$$

$$ma_z=\frac{du_z}{dt}\rho dxdydz \quad (8)$$

将（3）（6）式带入（1）式，x 方向有：

$$\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)dxdydz+\rho Xdxdydz=\rho dxdydz\frac{du_x}{dt} \quad (9)$$

即：

$$\rho\frac{du_x}{dt}=\left(\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\right)+\rho X \quad (10)$$

同样：

$$\rho\frac{du_y}{dt}=\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\right)+\rho Y \quad (11)$$

$$\rho\frac{du_z}{dt}=\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}\right)+\rho Z \quad (12)$$

二、应力形式化简

1、切应力与应变的关系

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \quad (13)$$

$$\tau_{xz}=\tau_{zx}=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \quad (14)$$

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}=\mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \quad (15)$$

2、法向应力与应变的关系

$$\sigma_{xx}=-p+2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u} \quad (16)$$

$$\sigma_{yy}=-p+2\mu\frac{\partial u_y}{\partial y}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u} \quad (17)$$

$$\sigma_{zz}=-p+2\mu\frac{\partial u_z}{\partial z}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u} \quad (18)$$

将（13）、（16）带入（10），

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(-p+2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x}-\frac{2}{3}\mu\nabla\cdot\vec{u}\right)\\&=-\frac{\partial p}{\partial x}+2\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla\cdot\vec{u}\right) \quad (19)\\&=-\frac{\partial p}{\partial x}+2\mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}&=\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial u_y}{\partial x}\right)\right]\\&=\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \quad (20)\\&=\mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial y}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\right]$$

$$=\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}\right)+\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \quad （21）$$

$$=\mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}+\mu\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}$$

即：

$$\rho\frac{du_x}{dt}=\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\right)+\rho X$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial x}+2\mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)+\mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial y}+\mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}+\mu\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}+\rho X$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}\right)-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)+\rho X$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2 u_x+\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)+\rho X$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2 u_x+\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)-\frac{2}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)+\rho X$$

$$=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2 u_x+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)+\rho X$$

（22）

同理：

$$\rho\frac{du_x}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2 u_x+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)+\rho X \quad （23）$$

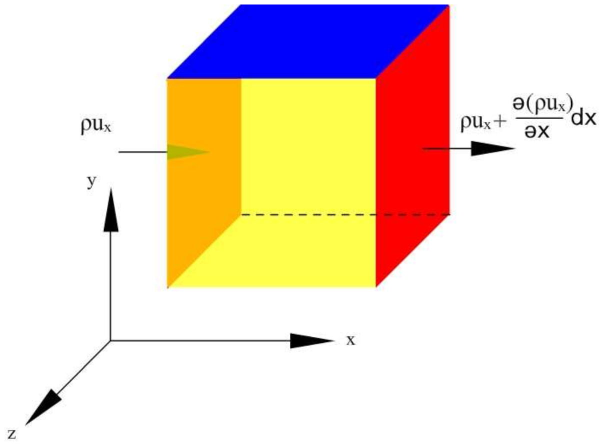
$$\rho\frac{du_y}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\nabla^2 u_y+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial y}\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)+\rho Y \quad （24）$$

$$\rho\frac{du_z}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\nabla^2 u_z+\frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)+\rho Z \quad （25）$$

矢量形式：

$$\rho\frac{d\vec{u}}{dt}=-\nabla p+\mu\nabla^2\vec{u}+\frac{1}{3}\mu\nabla\left(\nabla\cdot\vec{u}\right)+\rho\vec{F} \quad （26）$$

三、不可压缩流体的N-S方程



连续性方程的基本推导原理就是，单元体内流出、流入质量差等于该时间段内单元体内质量的变化。原理是很简单的。没有流入流出质量就不会变化，流入流出有了差值，说明单元体的质量变化了。

仍以 x 方向为例。

左侧质量流速（一般的流速是体积流速，m/s,为了推导质量的变化需要引入质量流速，质量流速的定义就是单位时间内通过单位横截面的流体质量）为 ρu_x，质量流速是位置的函数，因此在右侧面流出的质量流速为 $\rho u_x+\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}dx$。时间段 dt 内流出、流入单元体的质量差为：

$$\left[\rho u_x+\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}dx\right]dydzdt-[\rho u_x]dydzdt=\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}dxdydzdt \quad (27)$$

同理，该时间段 dt 内 y 方向，z 方向的流出流入质量差为：

$$\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}dxdydzdt \quad (28)$$

$$\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}dxdydzdt$$ （29）

因此，时间段 dt 内单元体六个面流出、流入的质量差为：

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}dxdydzdt+\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}dxdydzdt+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}dxdydzdt=\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\right]dxdydzdt$$

（30）

改时间段 dt 内单元体质量的变化体现在密度随时间的变化上，开始时间密度为 ρ，dt 时间末密度为 $\frac{\partial\rho}{\partial t}dt$。质量的变化为：

$$\rho dxdydz-\left(\rho+\frac{\partial\rho}{\partial t}dt\right)dxdydz=-\frac{\partial\rho}{\partial t}dxdydzdt$$ （31）

根据质量守恒，（30）式等于（31）式，即

$$\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\right]dxdydzdt=-\frac{\partial\rho}{\partial t}dxdydzdt$$ （32）

化简，

$$\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$ （33）

$$\nabla\cdot(\rho\vec{u})+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$ （34）

如果不可压缩流体，密度=constant，$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$，密度项可以提取出来，散度为：

$$\nabla\cdot\vec{u}=0$$ （34）

将（34）式带入（26）式，不可压缩流体的 Navier-Stokes 方程为：

$$\rho\frac{d\bar{u}}{dt}=-\nabla p+\mu\nabla^2\bar{u}+\rho\bar{F}$$ （35）

四、加速度项$\frac{d\vec{u}}{dt}$的处理

流动中，不仅不同位置的点具有不同的速度，就是在同一点，不同时刻速度也可能不同。速度既是位置的函数也是时间的函数。因此，加速度有两部分组成：迁移加速度和当地加速度。

以 x 方向为例，加速度的表达式为：

$$a_x=\frac{du_x\left(x,y,z,t\right)}{dt}=\frac{\partial u_x}{\partial t}+\frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u_x}{\partial z}\frac{dz}{dt} \quad (36)$$

式中，单位时间内，x（或 y，或 z）方向的增量既是 x 方向的加速度，即：

$$\frac{dx}{dt}=u_x,\frac{dy}{dt}=u_y,\frac{dz}{dt}=u_z \quad (37)$$

带入（36）式，y 方向，z 方向同理，得到不同方向的加速度为：

$$\begin{aligned}
a_x&=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\\
a_y&=\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z} \quad (38)\\
a_z&=\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}$$

矢量形式为：

$$\vec{a}=\frac{d\vec{u}}{dt}=\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\left(\vec{u}\cdot\nabla\right)\vec{u} \quad \text{（39，可见附录）}$$

将（39）式带入（26）式，可得最常见的 Navier-Stokes 方程形式：

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\left(\vec{u}\cdot\nabla\right)\vec{u}\right]=-\nabla p+\mu\nabla^2\vec{u}+\rho\overline{F} \quad (40)$$

或可写为：

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p+\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\vec{u}+\overline{F}=\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\left(\vec{u}\cdot\nabla\right)\vec{u} \quad (41)$$

【附录】关于哈密顿算子（Del Operator）

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \quad （42）$$

梯度

$$grad p = \nabla p = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) p = \frac{\partial p}{\partial x} i + \frac{\partial p}{\partial y} j + \frac{\partial p}{\partial z} k \quad （43）$$

散度

$$div \vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \cdot \left(u_x i + u_y j + u_z k \right) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad （44）$$

拉普拉斯算子

$$\begin{aligned} \Delta \varphi = \nabla^2 \varphi &= \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \varphi \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \end{aligned} \quad （44）$$

加速度的矢量形式：

$$\begin{aligned} \left(\vec{u} \cdot \nabla \right) \vec{u} &= \left[\left(u_x i + u_y j + u_z k \right) \bullet \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \right] \vec{u} \\ &= \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \vec{u} \end{aligned} \quad （45）$$

X 方向

$$\left(\vec{u} \cdot \nabla \right) u_x = \left(u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \right) u_x = u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad （46）$$

其他方向同理可得。